Ueber die Relationen zwischen einer gegebenen Curve $y = f(x)$ und einer daraus abgeleiteten Curve $y = k \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{k}{f'(x)}$, mit specieller Anwendung auf die Ellipse.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

hohen philosophischen Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Carl Völker

aus Cassel.

Marburg.

Universitäts-Buchdrukerei (R. Friedrich).

1880.

Seiner lieben Braut!

der Verfasser.

Die Gleichung einer auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogenen Curve sei gegeben in der Form:

$$y = f(x)$$

Man ziehe zu jeder Normalen dieser Curve durch einen in der Abscissenaxe im constanten Abstande k vom Coordinatenanfangspunkte angenommenen Punkt K eine Parallele bis zum Durchschnitte mit dem possitiven oder negativen Theil der Axe der Y und durch diesen Durchschnittspunkt eine Parallele zur Axe der X bis zum Durchschnitte mit der zum betreffenden Curvenpunkte gehörigen Ordinate; der geometrische Ort aller dieser Durchschnittspunkte ist eine Curve, welche den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bildet. Wir sind zu dieser Untersuchung veranlasst worden durch das Lesen einer kleinen Schrift von Hochheim*) über die »Differentialcurven der Kegelschnitte«, worin unter »Differentialcurve« einer gegebenen Curve $y = f(x)$ diejenige Curve verstanden wird, welche nach der Gleichung: $y = k \cdot \frac{dy}{dx} = k \cdot f^1(x)$ zu construiren ist, wenn k einen beliebig angenommen constanten Parameter bedeutet.

Die von uns betrachtete Curve dagegen ist gemäss der eben erklärten Entstehungsweise durch die Gleichung:

$$\text{(I.)} \quad \ldots \quad y_1 = \frac{k}{f^1(x)}$$

bestimmt.

---

*) Ad. Hochheim, Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte. Halle 1874.

§. 1.

Aus der Gleichung der Hauptcurve $y = f(x)$ und der der ersten derivirten Curve $y_1 = \frac{k}{f^1(x)}$ folgt:

1) Die Hauptcurve und die erste derivirte Curve haben gemeinschaftliche Punkte für die Werthe der Abscissen, welche aus der Gleichung:

$$\text{(II.)} \ldots\ldots f(x) \cdot f^1(x) = k$$

für x hervorgehen.

2) Soll der Constructionspunkt K in Fig. 1 ein solcher sein, dass die von ihm aus construirten Punkte der derivirten Curve auf der ursprünglichen Curve selbst liegen, so dass die derivirte Curve mit der Hauptcurve identisch wird, so müssen die Coordinaten jenes Punktes (x_1, y_1) der Differentialgleichung:

$$\text{(III.)} \ldots\ldots x_1 + y_1 \cdot f^1(x) - f(x) \cdot f^1(x) = o$$

genügen. Wenn nun der Constructionspunkt fest, d. h. unabhängig von den Coordinaten des jedesmaligen Tangentialpunktes sein soll, so muss:

a) das von x_1 und y_1 freie Glied constant,

b) $f^1(x)$ constant, was jedoch nur bei der Geraden stattfindet, daher in allen anderen Fällen

c) $y_1 = o$ sein.

Dass die Erfüllung dieser Bedingung keine allgemeine und häufige ist, leuchtet ein.

Man überzeugt sich leicht, dass unter allen Curven nur die Parabel, deren Scheitel in der Axe der X liegt, die Eigenschaft hat, unter Anwendung der angegebenen Construction von dem festen Punkte $(x = \pm p;\ y = o)$ als erste derivirte Curve die Hauptcurve wieder zu liefern. p ist hierbei der halbe Parameter der Parabel. Wählt man $x = +p$, so führt die Construction auf den Tangentialpunkt wieder zurück, für $x = -p$ hingegen trifft man auf den senkrecht ober- oder unterhalb des Tangentialpunkts liegenden Punkt der ursprünglichen Parabel.

3) Ebenso wie die erste derivirte Curve aus der Hauptcurve entsteht, so entsteht die zweite derivirte Curve aus der ersten. Die allgemeine Gleichung der zweiten derivirten Curve ist:

$$(IV.) \ldots\ldots y_2 = -\frac{f^{I}(x)^2}{f^{II}(x)}$$

4) Die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte der Hauptcurve und der zweiten derivirten Curve liefert daher die Gleichung:

$$(V.) \ldots\ldots f(x).f^{II}(x) + f^{I}(x)^2 = o$$

als Werthe von x.

5) Die Coordinaten des Punktes (x_1, y_1), von welchem aus construirt, die zweite derivirte Curve mit der Hauptcurve identisch wird, müssen die Gleichung:

$$(VI.) \ldots\ldots x_1 - y_1 \frac{k.f^{II}.(x)}{f^{I}(x)^2} + \frac{k.f(x).f^{II}(x)}{f^{I}(x)^2} = o$$

befriedigen. Die obigen drei Bedingungen unter 2) gelten auch hier. Aus der Differentialgleichung:

$$\frac{k.f(x).f^{II}(x)}{f^{I}(x)^2} = m$$

folgt:

$$\frac{dy}{C y^{\frac{m}{k}}} = dx$$

welche Gleichung für $m = -k$ integrirt:

$$y^2 = 2C(x + C_1)$$

die Gleichung einer Parabel liefert.

Für $m = k$ hingegen resultirt

$$y = e^{(x + C_1)C}$$

die Gleichung der logarithmischen Linie.

Wollte man in den Gleichungen (III.) und (VI.) $x_1 = o$ setzen, so würde die Ordinate $y_1 = f(x)$, also bei der Construction eine abhängige Grösse sein.

Liegt demnach der Constructionspunkt K in der Axe der X, so haben alle Curven, deren Gleichungen durch irgend eine Annahme des Verhältnisses von $m:k$ aus der Gleichung:

$$\text{(VII.)} \quad \ldots \quad y = \left[\frac{C(k-m)}{k}(x + C_1)\right]^{\frac{k}{k-m}}$$

hervorgehen, sowie die logarithmische Linie mit ihren zweiten derivirten Curven gleiche Gestalt.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass bei Annahme des Constructionspunktes in der Ebene der XY die derivirten Curven gegen die Hauptcurven um ein constantes Stück, die Ordinate des Constructionspunktes, parallel der Axe der Y verschoben sind.

6) Ist demnach

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer Parabel, und wählt man die Constructionsstrecke so, dass k gleich dem halben Parameter der Parabel ist, so ist die Hauptcurve mit allen ihren derivirten Curven identisch; stellt hingegen $y = f(x)$ die Gleichung einer logarithmischen Linie dar, so ist diese mit allen ihren derivirten Curven von gerader Ordnung und ihrer ersten Differentialcurve identisch.

7) Die aus den Gleichungen:

$$\text{(VIII.)} \quad \ldots \quad f^{\text{I}}(x)^3 + k \cdot f^{\text{II}}(x) = 0 \text{ und}$$
$$\text{(IX.)} \quad \ldots \quad k \cdot f^{\text{II}}(x) + f^{\text{I}}(x) = 0$$

entspringenden Werthe von x liefern: Aus (VIII.) die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte der ersten und zweiten derivirten Curven, aus (IX.) die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte der zweiten derivirten Curve und der ersten Differentialcurve.

7) Die erste derivirte Curve hat mit der ersten Differentialcurve gemeinschaftliche Punkte für die Werthe des x, welche aus der Gleichung:

$$\text{(X.)} \quad \ldots \quad f^{\text{I}}(x)^2 = 1$$

für die Abscissen hervorgehen.

§. 2.

Die Punkte (x, y) der Hauptcurve, (x, y_1) der ersten derivirten, (x, y_2) der zweiten derivirten Curve mögen entsprechende Punkte genannt werden.

Alsdann folgt aus den Gleichungen $y = f(x)$, (I.) und (IV.):

1) Hat die Hauptcurve für eine bestimmte Abscisse einen Culminationspunkt, so liegt der entsprechende Punkt der ersten derivirten Curve im Unendlichen, der der zweiten derivirten Curve in der Axe der X, wenn $f^{II}(x)$ für den Werth dieser Abcisse nicht verschwindet.

2) Einem Beugungspunkte der Hauptcurve entspricht ein Culminationspunkt der ersten derivirten Curve und ein im Unendlichen liegender Punkt der zweiten derivirten Curve.

3) Steht eine Normale der Hauptcurve senkrecht auf der Axe der Y, so liegt der dem Schnittpunkt der Normalen und der Hauptcurve entsprechende Punkt der ersten derivirten Curve sowie der der zweiten derivirten Curve in der Axe der X, falls $f^{II}(x)$ für den Werth der zugehörigen Abscisse einen bestimmten Werth behält.

4) Hat die Hauptcurve eine Spitze, in welcher der Krümmungshalbmesser gleich Null ist, so läuft die Tangente am entsprechenden Punkte der ersten derivirten Curve der Axe der Y parallel, während der entsprechende Punkt der zweiten derivirten Curve in der Axe der X liegt, wenn nur $f^{I}(x)$ für den Werth dieser Abscisse einen bestimmten Werth behält.

§. 3.

1) Für jeden Schnittpunkt der Hauptcurve mit der ersten derivirten Curve ist die absolute

Länge der Tangente der Hauptcurve $= \frac{\sqrt{k^2 + f(x)^2}}{f^1(x)}$

» » Subtangente » » $= \frac{f(x)}{f^1(x)}$

» » Normalen » » $= \sqrt{k^2 + f(x)^2}$

» » Subnormalen » » $= k$

2) Für jeden Schnittpunkt der ersten mit der zweiten derivirten Curve ist die absolute

Länge d. Tangente der 1. derivirten Curve $= \sqrt{\frac{k^2}{f^1(x)^2} + \frac{f^1(x)^2}{f^{11}(x)^2}}$

» » Subtangente » » » $= \frac{f^1(x)}{f^{11}(x)}$

» » Normalen » » » $= k \sqrt{1 + \frac{1}{f^1(x)^2}}$

» » Subnormalen » » » $= k.$

3) Für einen beliebigen Punkt (x, y) der Hauptcurve ist die Subtangente:

$$= \frac{f(x)}{f^1(x)}$$

für den entsprechenden Punkt die der ersten derivirten Curve:

$$= \frac{f^1(x)}{f^{11}(x)}$$

Somit liefern die aus Gleichung:

$$(XI.) \ldots . f(x) . f^{11}(x) = f^1(x)^2$$

hervorgehenden reellen Werthe von x die Abscissen der Punkte, deren zugehörige Subtangenten für beide Curven gleich sind.

4) Die Subnormale für einen beliebigen Punkt (x, y) der Hauptcurve ist

$$= f(x) . f^1(x)$$

die des entsprechenden Punktes der ersten derivirten Curve:

$$= \frac{k^2 . f^{11}(x)}{f^1(x)^3}$$

Daraus folgt: Für die aus der Gleichung:

$$(XII.) \ldots . k^2 . f^{11}(x) = f(x) . f^1(x)^4$$

resultirenden reellen Werthe des x sind die Subnormalen beider Curven gleich.

In gleicher Weise lassen sich leicht die analogen Gleichungen für die derivirten Curven höherer Ordnung aufstellen, die jedoch nicht mehr so einfach sind.

5) Für einen beliebigen Punkt (x, y) der ersten derivirten Curve ist die Subtangente

$$= \frac{f^{I}(x)}{f^{II}(x)}$$

die des entsprechenden Punktes der zweiten derivirten Curve

$$= \frac{f^{I}(x) . f^{II}(x)}{2 . f^{II}(x)^{2} - f^{I}(x) . f^{III}(x)}$$

Demnach liefern die aus der Gleichung

$$(XIII.) \ldots f^{II}(x)^{2} = f^{I}(x) . f^{III}(x)$$

hervorgehenden reellen Wurzeln diejenigen Werthe von x, für welche beide Curven gleiche Subtangenten haben.

6) Die Subnormale der ersten derivirten Curve ist

$$= \frac{k^{2} . f^{II}(x)}{f^{I}(x)^{3}}$$

die des entsprechenden Punktes der »Differentialcurve«:

$$= k^{2} . f^{I}(x) . f^{II}(x)$$

Besitzt demnach die Gleichung:

$$(XIV.) \ldots f^{I}(x)^{4} = 1$$

reelle Wurzeln, so haben beide Curven für jede einer solchen Wurzel entsprechende Abscisse gleiche Subnormalen.

7) Die Tangenten und Normalen an entsprechenden Punkten irgend einer Curve und ihrer ersten derivirten Curve bilden ein Sehnenviereck, wobei der Durchmesser des Kreises gleich der Entfernung des Durchschnittspunktes der Tangenten von dem der Normalen ist.

Die Tangente des von den beiden Tangenten an entsprechenden Punkten (x, y und x, y_{1}) eingeschlossenen Winkels ist:

$$= \frac{f^{I}(x)^{3} + k . f^{II}(x)}{f^{I}(x)^{2} - k . f^{I}(x) . f^{II}(x)}$$

Hieraus folgt:

8) Jeder der Gleichung:

$$(XV.) \ldots f^{I}(x)^{3} + k . f^{II}(x) = 0$$

genügende reelle Werth von x liefert eine Abscisse, für welche die Tangenten an entsprechenden Punkten beider Curven ein-

ander parallel laufen. Der Durchmesser des dem Sehnenviereck zugehörenden Kreises ist dann unendlich gross.

9) Die aus der Gleichung:

$$\text{(XVI.)} \quad \ldots \quad f^{\text{I}}(x) - k f^{\text{II}}(x) = o$$

resultirenden reellen Wurzeln liefern die Werthe der Abscissen aller der Punkte, an welchen die Tangenten der entsprechenden Punkte beider Curven senkrecht zu einander stehen. Das Sehnenviereck ist alsdann ein Rechteck.

Das Sehnenviereck reducirt sich auf einen Punkt, falls $f(x) f^{\text{I}}(x) = k$ ist.

§. 4.

1) Verschiebt man die Hauptcurve längs der Axe der Y um die Strecke m, so ist ihre Gleichung:

$$y^{\text{I}} + m = f(x),$$

die der ersten derivirten Curve:

$$\text{(XVII.)} \quad \ldots \quad y^{\text{I}}_{1} = \frac{k}{f^{\text{I}}(x)}$$

und die der zweiten derivirten Curve:

$$\text{(XVIII.)} \quad \ldots \quad y^{\text{I}}_{2} = -\frac{f^{\text{I}}(x)^2}{f^{\text{II}}(x)}$$

d. h. Eine Verschiebung der Hauptcurve parallel zur Axe der Y ändert die Lage und Gestalt der derivirten Curven nicht.

2) Verschiebt man die Hauptcurve längs der Axe der X um eine Strecke n, so ist ihre Gleichung:

$$y = f(x^{\text{I}} + n),$$

die der ersten derivirten Curve:

$$\text{(XIX.)} \quad \ldots \quad y_{1} = \frac{k}{f^{\text{I}}(x^{\text{I}} + n)},$$

die der zweiten derivirten Curve:

$$\text{(XX.)} \quad \ldots \quad y_{2} = -\frac{\left[f^{\text{I}}(x^{\text{I}} + n)\right]^2}{f^{\text{II}}(x^{\text{I}} + n)}$$

d. h. Eine Verschiebung der Hauptcurve parallel zur Axe der X

bewirkt eine Verschiebung der beiden ersten derivirten Curven um eine gleiche Strecke in derselben Richtung.

3) Dreht man die Hauptcurve um den Coordinatenanfangspunkt, so ist ihre Gleichung:

(XXI.) . . . . $\xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta - f(\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) = o,$

die der ersten derivirten Curve:

$$\text{(XXII.)} \quad \ldots \quad \eta_1 = k \cdot \frac{\cos \vartheta - \dfrac{d f(\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)}{d \eta}}{\dfrac{d f(\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)}{d \xi} - \sin \vartheta},$$

die der zweiten derivirten Curve:

$$\text{(XXIII.)} \quad \ldots \quad \eta_2 = \frac{k}{\dfrac{d \eta_1}{d \xi}};$$

Demnach wird durch eine Drehung der Hauptcurve um den Coordinatenanfangspunkt im Allgemeinen die Lage und Gestalt der beiden ersten derivirten Curven geändert.

In den in diesem §. erwähnten Eigenschaften stimmen daher die beiden ersten derivirten Curven mit ihrer zugehörigen Differentialcurve überein.

4) Construirt man von einem Punkte (k, o) eine Anzahl von derivirten Curven zu einer gegebenen Curve, so findet man, dass alle derivirten Curven gerader Ordnung unabhängig von der Constructionsstrecke k sind.

Daraus folgt: Construirt man von beliebigen Punkten in der Axe der X zu einer gegebenen Curve eine Anzahl von derivirten Curven, so sind je zwei von gerader und gleicher Ordnung von gleicher Lage und Gestalt.

Die erste und zweite derivirte Curve der Ellipse.

§. 5.

Gleichung und Gestalt der ersten derivirten Curve.

Ist die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Ellipse, deren grosse Axe in der Axe der X und deren Mittelpunkt im Coordinatenanfangspunkt liegt, gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

so ist nach pag. 3. Gleichung (I.) die Gleichung ihrer ersten derivirten Curve:

$$(2a) \quad \ldots \ldots \quad y = \mp \frac{k a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

oder:

$$(2b) \quad \ldots \ldots \quad b^2 x^2 y^2 + k^2 a^2 x^2 - k^2 a^4 = o$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt:

1) Bezeichnet man die vierte Proportionale von k, a und b mit m, so ergibt sich folgende Construction für die erste derivirte Curve:

Beschreibt man mit der halben grossen Axe der gegebenen Ellipse als Radius einen Kreis, so ist die zu jeder beliebigen Abscisse x (natürlich $< a$) gehörige Ordinate der zu construirenden Curve: die vierte Proportionale zu x, m und h, wobei h die der Abscisse x entsprechende Ordinate jenes Hauptkreises ist.

2) Die Curve besteht aus zwei symmetrisch zu den Coordinatenaxen liegenden Hälften, deren eine sich von der positiven und deren andere sich von der negativen Axe der X zwischen den Geraden $x = \pm a$ in der Weise entfernt, dass die Axe der Y Asymptote wird. (Fig. 2).

3) Die Curve hat in den Punkten:

$$\left(x = \pm a \sqrt{\frac{2}{3}} ; \; y = \pm \frac{k a}{b \sqrt{2}} \right)$$

Wendepunkte. Der Neigungswinkel der Tangente erreicht an diesen Punkten sein Minimum.

4) So lange $3x^2 < 2a^2$ oder $y^2 > \frac{k^2 a^2}{2b^2}$ ist, kehrt die Curve der Abscissenaxe ihre convexe Seite zu, von da ab ist sie bis zum Durchschnitt mit der Axe der X concav zu dieser.

5) Die Ordinaten der den Wendepunkten entsprechenden Ellipsenpunkte sind $y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Daraus folgt:

$$y_e \cdot y = \frac{k \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{k \cdot x}{2}$$

$$2 y_e \cdot y = k \cdot x$$

d. h. das Rechteck aus der Constructionsstrecke k und der den Wendungspunkten zugehörigen Abscisse ist doppelt so gross wie das Rechteck aus der Ordinate des Inflexionspunktes und der seines entsprechenden Punktes der Ellipse.

6) Unter Berücksichtigung der eingeführten Bezeichnungen in 1) ist:

$$x \cdot y = h \cdot m$$

d. h. die Rechtecke, von denen jedes gebildet ist aus der Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivirten Curve, verhalten sich wie die zu den entspechenden Ellipsenpunkten gehörenden Ordinaten des Hauptkreises der Ellipse.

Vermittelst dieser Gleichung lassen sich leicht zu jeder Abscisse die zugehörigen Ordinaten der ersten derivirten Curve finden.

7) Für $x = e$ ist $y = \pm \frac{k a}{e}$ d. h. ist das Product $k \cdot a$ gleich einer Constanten C, und construirt man zu einem System confocaler Ellipsen mit Hülfe von $k = \frac{C}{a}$ die zugehörigen ersten derivirten Curven, so gehen alle diese durch die vier Punkte $\left(\pm e, \pm \frac{C}{e}\right)$.

8) Genügt ein Punkt (x_1, y_1) der Gleichung (2b) so genügt ihr auch der Punkt $(-x_1, -y_1)$ d. h. jede durch den Coordinatenanfangspunkt gelegte Sehne der ersten derivirten Curve wird in diesem Punkte halbirt.

9) Zieht man von den beiden Brennpunkten der Ellipse zwei Strahlen ϱ und ϱ_1 nach einem Punkte (x, y) der ersten derivirten Curve so ist:

$$(\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1) = 4\,e\,x$$

d. h. das Rechteck aus der Summe und der Differenz zweier nach einem Punkte der ersten derivirten Curve gezogener Brennstrahlen ist gleich dem aus der Abscisse des Punktes und der doppelten linearen Excentricität der Ellipse.

Da nun für zwei Brennstrahlen r und r_1 nach dem entsprechenden Punkte der Ellipse für diese die nämliche Relation:

$$(r + r_1)(r - r_1) = 4\,e\,x$$

gilt, so folgt:

$$(\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1) = (r + r_1)(r - r_1)$$

Für $x = \frac{e}{4}$ resultirt:

$$(\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1) = (a + b)(a - b)$$

10) Ist $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung eines Kreises, so ist die seiner ersten derivirten Curve:

$$(3) \quad \ldots \quad y = \mp \frac{k\sqrt{r^2 - x^2}}{x}$$

welche Gleichung aus (2a) hervorgeht, indem man $a = b = r$ setzt.

§. 6.

Gleichung und Gestalt der zweiten derivirten Curve.

Nach §. 1. (IV.) ist die Gleichung der zweiten derivirten Curve der im vorigen §. gegebenen Ellipse:

$$(4a) \quad \ldots \quad y = \pm \frac{b}{a^3} \cdot x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$$

oder:

$$(4b) \quad \ldots \quad a^6 y^2 + b^2 x^6 - a^2 b^2 x^4 = 0$$

Hieraus folgt:

1) Die Curve geht auch durch folgende Construction hervor: Beschreibt man um die gegebene Ellipse den zugehörigen Hauptkreis, so ist die zu jeder Abscisse $x < a$ gehörende Ordinate y der zu construirenden Curve gleich der vierten Proportionale zu a, b und der Länge, welche der vierten Proportionale von a, x und der vierten Proportinale von a, b und x entspricht.

2) Die Curve besteht aus zwei symmetrisch zu den Coordinatenaxen liegenden Hälften, die zwischen den Geraden $x = \pm a$ verlaufen und von denen die eine Hälfte oberhalb, die andere unterhalb der Abscissenaxe sich befindet.

3) Der Coordinatenanfangspunkt ist Berührungspunkt der Axe der X mit der Curve.

4) Die Punkte $\left(x = \pm a \sqrt{\frac{2}{3}};\ y = \pm \frac{2b}{3\sqrt{3}}\right)$ sind Culminationspunkte der Curve.

5) Die Punkte

$$\left(x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\frac{11}{3}}};\ y = \pm \frac{b}{4} \sqrt{\frac{1}{3}\left(5\sqrt{\frac{11}{3}} - 7\right)}\right)$$

sind Inflexionspunkte.

6) So lange $x < \pm \frac{a}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\frac{11}{3}}}$ ist, kehrt die Curve der Abscissenaxe die convexe Seite zu.

7) Der Coordinatenanfangspunkt ist ausserdem ein Doppelpunkt, in dem sich die beiden Curvenäste berühren.

Die Curve besteht demnach aus vier congruenten Theilen. Jeder Quadrant geht unter dem Winkel von 0^0 vom Coordinatenanfangspunkte, welcher ein Doppelpunkt ist, in dem sich zwei Curvenäste berühren, aus, ändert seine Krümmung, indem er durch einen der Inflexionspunkte

$$\left(x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\frac{11}{3}}};\ y = \pm \frac{b}{4} \sqrt{\frac{1}{3}\left(5\sqrt{\frac{11}{3}} - 7\right)}\right)$$

von der convexen zur concaven Krümmung übergeht, erreicht

bei $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y = \frac{2b}{3\sqrt{3}}$ seinen oberen Culminationspunkt und schneidet die Axe der X für $x = a$ unter einem rechten Winkel.

Die Curve ist scheinbar eine Schleifenlinie (Fig. 3.).

8) In Gleichung (4a) $a = b = r$ gesetzt, liefert die Gleichung der zweiten derivirten Curve des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

nämlich:

$$(5) \quad \ldots \quad y = \pm \frac{x^2}{r^2}\sqrt{r^2 - x^2}$$

Ausserdem gilt von der zweiten derivirten Curve der Ellipse dasselbe wie von der ersten in §. 5. 8) und 9).

9) Für $x = e$ geht die Curve durch die Punkte $\left(\pm e \pm \frac{b^2 e^2}{a^3}\right)$

§. 7.

Die Polargleichungen der beiden ersten derivirten Curven.

Unter Beibehaltung der Axe der X als feste Axe und des Coordinatenanfangspunktes als Pol resultirt aus Gleichung (2b) vermittelst der Substitution:

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi$$

die Polargleichung der ersten derivirten Curve als:

$$(6) \quad \ldots \quad r^4 b^2 \sin^2\varphi\cos^2\varphi + r^2 k^2 a^2 \sin^2\varphi - k^2 a^4 = 0.$$

Es folgen hieraus für r die Werthe:

$$r_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a}{b\cos\varphi}\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{k^2 + 4b^2\,cotg^2\varphi} - k\right)}$$

$$r_{\frac{3}{4}} = \pm \frac{a}{b\cos\varphi}\sqrt{-\frac{k}{2}\left(\sqrt{k^2 + 4b^2\,cotg^2\varphi} + k\right)}$$

Da die beiden letzten Wurzeln imaginär sind, so folgt, dass nur zwei Punkte der Curve im Abstande $r_{\frac{1}{2}}$ vom Pol symmetrisch entfernt liegen.

Die Polargleichung der zweiten derivirten Curve ergibt sich aus Gleichung (4b) als:

(7) . . . . $r^6 b^2 \cos^6 \varphi - r^4 a^2 b^2 \cos^4 \varphi + r^2 a^6 \sin^2 \varphi = 0.$

Es fliessen hieraus für r die Werthe:

$$r_{\substack{1\\2}} = 0$$

$$r_{\substack{3\\4\\5\\6}} = \pm \frac{a}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2b \cos \varphi} \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi - 4a^2 \sin^2 \varphi}}$$

Ferner folgt aus Gleichung (7) und den Werthen von r:

1) Da in Gleichung (7) der Coefficient von r und das absolute Glied fehlt, so schneidet jede durch den Pol gehende Gerade die Curve in zwei mit ihm zusammenfallenden Punkten. Der Coordinatinatenanfangspunkt oder Pol ist also ein Doppelpunkt. (cf. §. 6. 7).

2) So lange

$$tang\, \varphi < \frac{b}{2a}$$

ist, gibt es für r vier reelle Werthe; d. h. eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade kann die Curve ausserdem noch in vier Punkten schneiden.

§. 8.

Beziehungen der Ellipse zu ihrer ersten derivirten Curve.

1) Für die Durchschnittspunkte der Ellipse und ihrer ersten derivirten Curve sind die Coordinaten:

$$x_1 = +k \cdot \frac{a^2}{b^2};\ y_1 = +\frac{1}{b} \sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

$$x_2 = -k \cdot \frac{a^2}{b^2};\ y_2 = +\frac{1}{b} \sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

$$x_3 = -k \cdot \frac{a^2}{b^2};\ y_3 = -\frac{1}{b} \sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

$$x_4 = +k \cdot \frac{a^2}{b^2};\ y_4 = -\frac{1}{b} \sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

2) Die Ellipse und ihre erste derivirte Curve haben nur so lange reelle Schnittpunkte als

$$k < \frac{b^2}{a}$$

ist. Für $k = \frac{b^2}{a}$ ist $y = o;\ x = a;$ d. h. in diesem Falle berühren sich die beiden Curven in den Endpunkten der grossen Axe der Ellipse.

3) Aus §. 5. (1) und (2a) folgt:

$$y_e \cdot y = \frac{k \cdot h}{x} \cdot h$$

d. h. die Rechtecke, gebildet aus den Ordinaten entsprechender Punkte einer Ellipse und ihrer ersten derivirten Curve, sind gleich den Rechtecken, gebildet aus der zur gemeinschaftlichen Abscisse gehörigen Ordinate des Hauptkreises h und der vierten Proportionale von k, h und x.

4) $\frac{y_e}{y} = \frac{b^2}{k\,a^2}\,x;$ oder: $y_e = \frac{b^2}{k\,a^2} \cdot x \cdot y$ d. h. die Rechtecke aus einer Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivirten Curve verhalten sich wie die zu den betreffenden Abscissen gehörigen Ordinaten der Ellipse.

5) $y = \frac{k \cdot a}{b} \cdot \frac{h}{x}$ oder: $\frac{x \cdot y}{h \cdot k} = \frac{a}{b}$ d. h. das Rechteck aus einer Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivirten Curve steht zu dem Rechtecke aus der zu dieser Abscisse gehörigen Ordinate des Hauptkreises und der Constructionstrecke k in einem constanten Verhältnisse, nämlich dem der beiden Halbaxen der Ellipse $a : b$.

6) $\frac{x \cdot y}{h \cdot k} = \frac{x_1 \cdot y_1}{h_1 \cdot k};\ \frac{x \cdot y}{x_1 \cdot y_1} = \frac{h}{h_1}$ d. h. die Rechtecke aus einer Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivirten Curve verhalten sich wie die zu den Abscissen gehörigen Ordinaten des Hauptkreises.

Aus 3) folgt, dass das Rechteck aus der Ordinate der ersten derivirten Curve und der entsprechenden der Ellipse unabhängig ist von der Halbaxe b.

7) Construirt man demnach ein System von Ellipsen mit der Hauptaxe $2a$, welche in der Axe der X liegt, und zu jeder derselben die zugehörige erste derivirte Curve, so sind für je eine gemeinschaftliche Abscisse die Rechtecke aus je zwei entsprechenden Ordinaten gleich.

8) Für $a = b$ folgt aus 4)

$$\frac{y_k}{y} = \frac{x}{k}$$

d. h. die Ordinaten zugehöriger Punkte eines Kreises und seiner ersten derivirten Curve verhalten sich wie die zugehörige Abscisse zur Constructionstrecke k.

9) Ist a in den beiden Gleichungen §. 5. (1) und (2a) variabel, so entspricht der Gleichung (1) ein System von Ellipsen, welchen die Axe $2b$ gemein ist, und der Gleichung (2a) die Schaar der zugehörigen ersten derivirten Curven.

Durch Elimination der Veränderlichen a folgt aus beiden Gleichungen:

$$(8a) \ldots\ldots x = \pm \frac{b^2 - y^2}{k} \quad \text{oder:} \quad y^2 = b^2 \mp k\,x$$

$$(8b) \ldots\ldots x = o.$$

Haben demnach alle Ellipsen eines Systems die Axe $2b$ gemein, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in denen jede Ellipse von ihrer ersten derivirten Curve geschnitten wird, die beiden Parabeln, deren Gleichungen (8a) sind und die Axe der Y.

10) Es seien a und b in den Gleichungen §. 5. (1) und (2a) variabel, dagegen $\frac{a}{b}$ constant. Nach Elimination der Variabeln folgt:

$$(9) \ldots\ldots x = \pm k \frac{a^2}{b^2}$$

d. h. die Schnittpunkte ähnlicher Ellipsen und ihrer zugehörigen

ersten derivirten Curven liegen auf der positiven bezw. negativen Richtung der Axe der X und zwar im Abstande $k \cdot \frac{a^2}{b^2}$ vom Coordinatenanfangspunkte entfernt.

Für $a = b$ erhält man:

$$(10) \ldots \ldots x = \pm k$$

d. h. der geometrische Ort aller Schnittpunkte eines Systems concentrischer Kreise und ihrer zugehörigen ersten derivirten Curven ist der Constructionspunkt und der im gleichen Abstande vom Coordinatenanfangspunkte nach entgegengesetzter Richtung liegende Punkt.

§. 9.

Beziehungen der Ellipse zu ihrer zweiten derivirten Curve.

1) Für die Durchschnittspunkte der Ellipse und ihrer zweiten derivirten Curve sind die Coordinaten:

$$x = \pm a; \ y = o$$

[cf. §. 6. (7].

2) Aus den Gleichungen (1) des §. 5. und (4a) des §. 6. folgt:

$$\frac{y_e}{y} = \frac{a^2}{x^2}$$

d. h. die Ordinate der Ellipse verhält sich zur entsprechenden Ordinate der zweiten derivirten Curve wie das Quadrat der grossen Halbaxe zum Quadrate der gemeinschaftlichen Abscisse.

3) Es ist:

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{k\,x\,(a^2 - x^2)}{a^2}; \ *)$$

daher gilt hier Analoges wie §. 8. 7).

4) Aus §. 6. 8) folgt:

Die Rechtecke aus der Summe und der Differenz je zweier nach entsprechenden Punkten der beiden ersten derivirten Curven und der Ellipse gezogenen Brennstrahlen sind einander gleich.

---

*) y_1 und y_2 haben die Werthe des y in den Gleichungen: §. 5. (2_a) bezw. §. 6. (4_a).

5) Ist a in den Gleichungen (1) und (4a) variabel, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte aller Ellipsen und ihrer entsprechenden zweiten derivirten Curven der Coordinatenanfangspunkt.

6) Ist b in den Gleichungen (1) und (4a) variabel, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte aller Ellipsen und ihrer entsprechenden zweiten derivirten Curven die Gerade $x = \pm a$.

7) Desgleichen ist in diesem Falle die Gerade $x = \pm a$ der geometrische Ort der Schnittpunkte aller ersten und der ihnen entsprechenden zweiten derivirten Curven.

Ist daher bei einem System von Ellipsen die Halbaxe b variabel, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Ellipsen und ihrer entsprechenden ersten derivirten Curven derselbe wie der jener mit ihren entsprechenden zweiten derivirten Curven, nämlich die Gerade $x = \pm a$.

8) Da die Proportion 2) auch für den Kreis vom Radius a gelten muss, so folgt:

Construirt man zu einem System von Ellipsen ihre zweiten derivirten Curven und zu jenen die zugehörigen Hauptkreise sowie deren zweiten derivirten Curven, so verhält sich je eine Ordinate der Ellipse zu ihrer entsprechenden der zweiten derivirten Curve, wie je eine Ordinate des betreffenden Hauptkreises zu ihrer entsprechenden der zweiten derivirten Curve. Oder mit anderen Worten: Die Ordinaten der Ellipsen verhalten sich in diesem Falle zu den entsprechenden Ordinaten der Hauptkreise ebenso wie die entsprechenden Ordinaten der zugehörigen zweiten derivirten Curven.

§. 10.

Die erste derivirte Curve und eine Gerade.

Ist die Gleichung der Geraden

$$(11) \quad \ldots \quad x \cos\alpha + y \sin\alpha = p,$$

so ergibt sich durch Elimination von y aus den Gleichungen (11) und (2b):

$$(12)\ldots. x^4 - \frac{2p}{\cos\alpha}x^3 + \left(\frac{p^2}{\cos^2\alpha} + \frac{k^2 a^2}{b^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}\right)x^2 - k^2 a^4 \operatorname{tang}^2 \alpha = o$$

1) Jede Wurzel dieser Gleichung liefert eine Abscisse eines Schnittpunktes, dessen zugehörige Ordinate sich aus (11) ergibt. Da demnach die Curve von der Geraden höchstens in vier Punkten geschnitten werden kann, so ist die Curve von der vierten Ordnung.

2) Da die Gleichung (12) von geradem Grade und das absolute Glied negativ ist, sowie alle Coefficienten reell sind, so ergeben sich stets mindestens zwei reelle Wurzeln, also auch stets mindestens zwei reelle Schnittpunkte der Curve und der Geraden.

3) Für $p = o$ geht die Gleichung (12) über in:

$$(13)\ldots. x^4 + \frac{k^2 a^2}{b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha}x^2 - k^2 a^4 \sin^2 \alpha = o,$$

deren Wurzeln sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a}{b \operatorname{tang} \alpha}\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{k^2 + 4 b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha} - k\right)}$$

$$x_{\frac{3}{4}} = \pm \frac{a}{a \operatorname{tang} \alpha}\sqrt{-\frac{k}{2}\left(\sqrt{k^2 + 4 b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha} + k\right)}$$

d. h. jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Gerade schneidet die Curve nur in zwei Punkten, deren Coordinaten paarweise gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

4) Es sei $\alpha = o$; also $x = p$; $y = \pm \frac{k a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{p}$.

Eine Gerade parallel der Axe der Y schneidet demnach so lange $p < a$ ist, die Curve in zwei Punkten, welche symmetrisch zur Axe der X liegen. Für $p > a$ schneidet die Gerade die Curve überhaupt nicht.

5) Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht die Gleichung (12) über in:

$$x = \pm \frac{a^2 . k}{\sqrt{b^2 p^2 + a^2 k^2}}$$

Eine Gerade parallel der Axe der X schneidet also die Curve in zwei symmetrisch zur Axe der Y liegenden Punkten.

§. 11.

Die zweite derivirte Curve und eine Gerade.

Durch Elimination von y aus den Gleichungen (11) und (4b) ergibt sich:

$$(14)\ldots x^6 - a^2 x^4 + x^2 \cdot \frac{a^6}{b^2}\ cotg^2\ \alpha - \frac{2a^6 p \cos\alpha}{b^2 \sin^2\alpha} x + \frac{a^6 p^2}{b^2 \sin^2\alpha} = o$$

Entsprechend dem vorigen §. folgt aus Gleichung (14).

1) Die Curve ist von der sechsten Ordnung.

2) Für $p = o$ geht Gleichung (14) über in:

$$(15)\ldots. x^6 - a^2 x^4 + x^2 \cdot \frac{a^6}{b^2}\ cotg^2\ \alpha = o,$$

deren Wurzeln sind:

$$x_{\substack{1\\2}} = o; \quad x_{\substack{3\\4\\5\\6}} = \pm a \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2b}\sqrt{b^2 - 4a^2\ cotg^2\ \alpha}}$$

d. h. jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Gerade schneidet ausser in diesem Punkte die Curve noch in vier anderen Punkten, so lange $cotg^2\ \alpha < \frac{b^2}{4a^2}$ ist. Ist aber $cotg^2\ \alpha > \frac{b^2}{4a^2}$, so schneidet die Gerade die Curve nur im Coordinatenanfangspunkte. [cf. §. 7. 2)].

3) Für $\alpha = o$ ist $x = p$; $y = \pm \frac{b}{a^3} p^2 \sqrt{a^2 - p^2}$ d. h. jede Gerade parallel zur Axe der Y schneidet die Curve in zwei Punkten für $p < a$.

4) Für $\alpha = 90^0$ resultirt:

$$x^6 - a^2 x^4 + \frac{a^6 p^2}{b^2} = o;$$

Da dieser Gleichung höchstens zwei positive und höchstens zwei negative Wurzeln zukommen, so schneidet jede Gerade parallel zur Axe der X die Curve im Allgemeinen in vier Punkten.

§. 12.

Tangente der ersten derivirten Curve.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y) der ersten derivirten Curve ist:

$$(16^a) \ldots\ldots y - \eta = \mp \frac{k a^3}{b x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} (x - \xi)$$

oder:

$$(16^b) \ldots\ldots \eta = \mp \frac{k a^3}{b x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \left(2x - \frac{x^3}{a^2} - \xi\right)$$

Für $\eta = o$ ist $\xi = 2x - \frac{x^3}{a^2}$; die Tangente am Punkte (x, y) der ersten derivirten Curve schneidet demnach die Axe der X in einem Punkte, dessen Abstand vom Coordinatenanfangspunkte $\left[2x - \frac{x^3}{a^2}\right]$ ist.

Hieraus folgt folgende Construction der Tangente am Punkte (x, y) der Curve:

Man construirt die vierte Proportionale zu a, x und der dritten Proportionalen von a und x, schneidet die so erhaltene Strecke von der doppelten Abscisse des Berührungspunktes ab, trägt dann das von der doppelten Abscisse übrig bleibende Stück vom Ursprung auf der Axe der X ab und verbindet den Endpunkt des Abschnittes der Abscissenaxe mit dem gegebenen Punkte (x, y). Alsdann ist diese Verbindungslinie Tangente an die Curve.

Ueber den geometrischen Ort aller Schnittpunkte der Tangenten eines Systems von ersten derivirten Curven an Punkten, welche in einer Parallelen zur Axe der Y liegen, gilt dasselbe wie bei der »Diffentialcurve« der Ellipse.

2) Setzt man für η in Gleichung (16b) den Werth

$$\mp \frac{k a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi},$$

so resultirt in Bezug auf ξ folgende biquadratische Gleichung:

$$(17) \ldots . \xi^4 - 2\left(2x - \frac{x^3}{a^2}\right)\xi^3 + \left(4x^2 - \frac{3x^4}{a^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{x^6}{a^2} - x^4\right) = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$\xi_{\frac{1}{2}} = x$$

$$\xi_{\frac{3}{4}} = \frac{x}{a^2}\left[(a^2 - x^2) \pm \sqrt{2a^4 - 3a^2x^2 + x^4}\right]$$

Daraus folgt:

a) Die Tangente am Punkte (x, y) schneidet die Curve ausserdem in zwei Punkten.

b) Liegt der Berührungspunkt im Endpunkt der grossen Axe der Ellipse, so fallen beide Schnittpunkte in das Unendliche.

c) Projicirt man den Berührungspunkt (x, y) sowie die beiden Schnittpunkte der Tangente mit der Curve auf die Axe der X, so ist der zu diesen drei Punkten gehörige vierte harmonische Punkt:

$$\left\{\frac{x\left[(a^2 - x^2) \pm x^2\sqrt{(a^2 - x^2)(2a^2 - x^2)}\right]}{\left[(a^2 - x^2)^2 - a^2 - x^2\right]}; \ 0\right\},$$

welcher für $x = \pm a$ mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfällt.

§. 13.

Tangente der zweiten derivirten Curve.

Sind (x, y) die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung der Tagente der Curve:

$$(18a) \ldots . \ y - \eta = \pm \frac{bx(2a^2 - 3x^2)}{a^3\sqrt{a^2 - x^2}}(x - \xi)$$

oder:

$$(18b) \ldots . \ \eta = \pm \frac{bx(2a^2 - 3x^2)}{a^3\sqrt{a^2 - x^2}}\left[\frac{2x^2 - a^2}{2a^2 - 3x^2} \cdot x + \xi\right]$$

1) Für $\eta = 0$ ist: $\xi = \frac{2x^2 - a^2}{3x^2 - 2a^2} \cdot x$; die Tangente schneidet also die Axe der X im Abstande $\frac{2x^2 - a^2}{3x^2 - 2a^2} \cdot x$ vom Coordinatenanfangspunkte.

2) Setzt man $\eta = \pm \frac{b}{a^3} \xi^2 \sqrt{a^2 - \xi^2}$, so erhält man die Abscisse des Tangentialpunktes aus folgender Gleichung, welche in Bezug auf ξ vom sechsten Grade ist:

$$(19) \ldots \xi^6 - a^2 \xi^4 - \frac{(2a^2 - 3x^2)^2}{x^2 - a^2} x^2 \xi^2 - \frac{(2x^2 - a^2)(2a^2 - 3x^2) 2x^3}{x^2 - a^2} \xi - \frac{(2x^2 - a^2)^2}{x^2 - a^2} x^4 = o.$$

Nach Absonderung der Wurzeln:

$$\xi_{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} = x$$

bleibt:

$$(20) \ldots \xi^4 + 2x \xi^3 + \xi^2 (3x^2 - a^2) + 2x \xi (2x^2 - a^2) - \frac{x^2 (2x^2 - a^2)^2}{x^2 - a^2} = o.$$

Da diese Gleichung von geradem Grade und das absolute Glied negativ ist, so kommen ihr mindestens zwei reelle Wurzeln zu, deren eine positiv, deren andere negativ ist. Im Allgemeinen indessen hat die Tangente ausserdem vier Punkte mit der Curve gemein. Liegt der Berührungspunkt im Coordinatenanfangspunkte, so folgt aus Gleichung (19) für $x = o$:

$$\xi^6 - a^2 \xi^4 = o,$$

welcher Gleichung die Wurzeln

$$\xi_{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} = o; \quad \xi_{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} = o; \quad \xi_{\begin{matrix}5\\6\end{matrix}} = \pm a$$

zukommen. Es fallen hier zwei jener Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte zusammen.

Dasselbe gilt von dem Punkte $x = + \frac{a}{\sqrt{2}}$; für diesen Werth liefert Gleichung (19) die Wurzeln:

$$\xi_{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} = o; \quad \xi_{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} = o; \quad \xi_{\begin{matrix}5\\6\end{matrix}} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

§. 14.

Zahl der Tangenten von einem Punkte (ξ, η) an die erste derivirte Curve.

Die Coordinaten des Berührungspunktes (x, y) der vom Punkte (ξ, η) gezogenen Tangenten bestimmen sich aus der Gleichung:

$$(2b) \quad \ldots \quad b^2 x^2 y^2 + k^2 a^2 x^2 - k^2 a^4 = o$$

und der (durch implicite Differentiation resultirenden) Gleichung der Tangente:

$$(21) \quad \ldots \quad b^2 x y (y - \eta) = (b^2 y^2 + k^2 a^2)(x - \xi).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen einmal y und dann x, so folgt:

$$(22) \quad \begin{cases} (k^2 a^2 + b^2 \eta^2) x^6 - a^2 b^2 \eta^2 x^4 - 2a^4 k^2 x^3 \xi + a^6 k^2 \xi^2 = o \\ \text{und:} \\ b^6 \xi^2 y^6 + 3 a^2 b^4 k^2 \xi^2 y^4 + a^2 b^2 k^2 (3 a^2 k^2 \xi^2 - a^2 b^2 \eta^2) y^2 \\ \qquad - 2a^6 b^2 k^4 \eta y + k^6 a^6 (\xi^2 - a^2) = o. \end{cases}$$

Daraus folgt:

1) Die erste derivirte Curve der Ellipse ist von der sechsten Classe, da sich im Allgemeinen von einem Punkte (ξ, η) sechs Tangenten an dieselbe ziehen lassen.

2) Werden von einem Punkte (ξ, η) alle möglichen Tangenten gezogen, so ist:

a) die algebraische Summe der Abscissen der Berührungspunkte
b) » » » » Producte von je vier Abscissen
c) » » » » Producte von je fünf Abscissen

gleich Null.

Ferner ist auch:

d) die algebraische Summe der Producte von je drei Ordinaten der Berührungspunkte gleich Null.

3) Für $\xi = o$ und $\eta = o$ ergibt sich aus Gleichung (22):

$$x = o; \; y = \infty$$

d. h. befindet sich der Punkt (ξ, η) im Coordinatenanfange, so fallen die Tangenten von diesem Punkte an die Curve mit der Axe der Y zusammen, sind also Asymptoten.

4) Für $\xi = \pm a;\ \eta = o$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} x^6 - 2a^3 x^3 + a^6 &= o \\ y^6 + 3a^2 b^2 k\, y^4 + 3a^4 k^4 y^2 &= o \end{aligned}\right\},$$

welche Gleichungen als reelle Wurzeln:

$$x_{\substack{1\\2}} = \pm a;\ y_{\substack{1\\2}} = o$$

besitzen; d. h. liegt der Punkt (ξ, η) im einen oder anderen Endpunkte der grossen Axe der Ellipse, so lässt sich von hier aus nur eine Tangente ziehen.

5) Für $\eta = o$ liefern die Gleichungen (22):

$$x = \sqrt[3]{a^2 \xi}$$

$$y = \pm \frac{k a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a \sqrt[3]{a \xi^2} - \xi^2}}{\xi}$$

Liegt demnach der Punkt (ξ, η) auf der Axe der X zwischen den beiden Geraden $x = \pm a$, so lassen sich von demselben zwei Tangenten an die Curve ziehen, deren Berührungspunkte symmetrisch zur Axe der X liegen.

6) Für $\xi = o$ ist:

$$x_{\substack{1\\2\\3\\4}} = o;\ x_{\substack{5\\6}} = \pm \frac{a b \eta}{\sqrt{k^2 a^2 + b^2 \eta^2}}$$

$$y = -\frac{a^2 k^2}{b^2 \eta}$$

d. h. von einem Punkte der Axe der Y lassen sich ebenfalls zwei Tangenten ziehen, deren Berührunspunkte mit der Curve symmetrisch zur Axe der Y liegen.

Eine der vorhergehenden Untersuchung entsprechende Betrachtung zeigt, dass die zweite derivirte Curve der Ellipse von der achten Classe ist.

§. 15.

Orthogonale Trajectorie einer Schaar von ersten derivirten Curven.

Durch Elimination von k aus den Gleichungen:

$$y = \mp \frac{k a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

und:

$$(b^2 y^2 + k^2 a^2) \frac{dy}{dx} - b^2 x y = o$$

folgt:

$$a^2 y dy - x(a^2 - x^2) dx = o$$

Führt man die Integration vorstehender Differentialgleichung aus, so ergibt sich:

$$(23) \ldots y = \mp \frac{x}{a\sqrt{2}} \sqrt{2a^2 - x^2}$$

als Gleichung jener orthogonalen Trajectorie, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht und die von beliebigen Punkten in der Axe der X construirten ersten derivirten Curven der Ellipse schneidet.

Diese Curve geht durch folgende Construction hervor: Man beschreibe mit $a\sqrt{2}$ als Radius einen Kreis und nehme den Mittelpunkt desselben als Coordinatenanfangspunkt an, projicire alsdann einige Radien auf die Abscissenaxe, bilde die vierte Proportionale zu $a\sqrt{2}$, x und dem vom Schnittpunkte des Radius und des Kreises auf die Axe der X gefällten Perpendikel und trage die so erhaltene Strecke vom Fusspunkte dieses Perpendikels aus auf demselben ab. Alsdann ist der jedesmal zuletzt erhaltene Punkt ein Punkt jener Curve.

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen und hat die Gestalt einer Schleife. Der zwischen den positiven Coordinatenaxen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel vom Coordinatenanfangspunkte aus, steigt mit concaver Krümmung gegen die Axe der X, erreicht bei $x = a$; $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ seinen oberen

Culminationspunkt und schneidet endlich die Abscissenaxe unter einem rechten Winkel bei $x = a\sqrt{2};\ y = o$. Der Mittelpunkt der Curve ist ihr einziger Inflexionspunkt. (Fig. 4).

Die Curve stimmt daher in ihren besonderen Punkten mit der Lemniskate vollständig überein und weicht nur in ihrem Laufe etwas von derselben ab.

Ihre Gleichung in Polarcoordinaten ist.

$$(24a) \quad \ldots \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{\cos^2\Theta}\sqrt{\cos 2\Theta}$$

oder:

$$(24b) \quad \ldots \quad r = \frac{2a\sqrt{2\cos 2\Theta}}{(\cos 2\Theta + 1)}$$

Aus den Gleichungen der Curve tritt sogleich die Unabhängigkeit derselben von der Halbaxe b der Ellipse hervor. Daraus folgt:

Construirt man zu einer Schaar von Ellipsen, welche nur die in der Axe der X liegende Hauptaxe (2a) gemein haben, von beliebigen Punkten der Abscissenaxe zu jeder derselben eine Schaar von ersten derivirten Curven, so ist die orthogonale Trajectorie aller dieser Curven diejenige, deren Gleichung in (23) und (24) angegeben wurde.

Die Gleichung der ersten derivirten Curve dieser Trajectorie ist:

$$(25a) \quad \ldots \quad y = +\frac{k\,a\sqrt{2}\ \sqrt{2a^2 - x^2}}{2(a^2 - x^2)}$$

oder:

$$(25b) \quad \ldots \quad 2(a^2 - x^2)\,y^2 = k^2\,a^2\,(2a^2 - x^2)$$

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen; der zwischen den positiven Coordinatenaxen liegende Quadrant geht von seinem oberen Culminationspunkte $\left(x = o;\ y = \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ aus, steigt mit convexer Krümmung gegen die Axe der X, hat die Gerade $x = +a$ zur Asymptote, kehrt aus dem Unendlichen zurück, nimmt in dem Inflexionspunkt, welcher zwischen $x = a$ und $x = a\sqrt{2}$ liegt, concave Krümmung gegen die Abscissenaxe an und schneidet letztere lothrecht in $x = a\sqrt{2}$. (Fig. 5).

Die Abscisse des Inflexionspunktes bestimmt sich aus der Gleichung:

$$x^6 - 6a^2x^4 + 6a^4x^2 + 3a^6 = 0.$$

§. 16.

Die beiden ersten derivirten Curven und die „Differentialcurve".

Nach §. 5. (2a) ist die Gleichung der ersten derivirten Curve:

$$y = \mp \frac{ka}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x};$$

die der entsprechenden Differentialcurve ist:

$$y_a = \mp \frac{kb}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Hieraus folgt:

1) $$y \,.\, y_a = k^2$$

d. h. das Rechteck aus jeder Ordinate der ersten derivirten Curve und jeder zur selben Abscisse gehörigen Ordinate der entsprechenden Differentialcurve ist constant und zwar gleich dem Quadrat über der gemeinschaftlichen Constructionsstrecke.

2) Demnach verhalten sich die Ordinaten der ersten derivirten Curve zu einander umgekehrt wie die Ordinaten der entsprechenden Differentialcurve.

3) Für einen Schnittpunkt beider Curven ist:

$$y^2 = k^2; \text{ oder } y = \mp k.$$

Die Ordinaten der Schnittpunkte sind also unabhängig von den Halbaxen a und b der Ellipse.

Construirt man demnach eine Schaar von Ellipsen mit beliebigen Axen, deren grosse Axen immer in der Axe der X liegen, und zu jeder derselben die zugehörige erste derivirte Curve sowie die entsprechende Differentialcurve, so sind die geometrischen Oerter der Schnittpunkte aller ersten derivirten Curven und aller Differentialcurven die Geraden $y = \mp k$.

4) Ist in den Gleichungen (2) und (4) die Halbaxe b der Ellipse variabel, so folgt durch Elimination dieser Grösse aus denselben:

$$(26a) \quad \ldots \quad y = \pm \frac{1}{a} \sqrt{k x (a^2 - x^2)}$$

und

$$(26b) \quad \ldots \quad x = o.$$

Haben demnach alle ersten und zweiten derivirten Curven von Ellipsen die Hauptaxe $2a$ gemein, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in welchen jede erste derivirte Curve von ihrer entsprechenden zweiten geschnitten wird, die Curve, deren Gleichung (26a) ist, und die Axe der Y.

Die Curve, welche durch die Gleichung (26a) dargestellt wird, hat die in (Fig. 6) angegebene Gestalt. Sie liegt symmetrisch zu den Coordinatenaxen innerhalb der Ellipse und besteht aus zwei Curvenästen, die sich im Coordinatenanfangspunkte berühren. Hier und in den Punkten ($x = \pm a$; $y = o$) schneidet sie die Axe der X lothrecht und hat für die Werthe $\left(x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}; y = \pm \sqrt{\frac{2ka}{3\sqrt{3}}}\right)$ Culminationspunkte. Wendepunkte sind nicht vorhanden. Alle vier Theile wenden der Abscissenaxe die concave Seite zu.

Ich, Carl Völker, Sohn des Stationsvorstehers Carl Völker, evangelischer Confession, wurde geboren am 21. Mai 1857 zu Cassel. Die Schulbildung erhielt ich auf der höheren Bürgerschule zu Hofgeismar und auf der Realschule I. Ordnung zu Cassel. Von der letztgenannten Anstalt wurde ich am 16. September 1876 mit dem Zeugniss der Reife entlassen. Vom Herbste des Jahres 1877 an studire ich an der Universität zu Marburg Mathematik und Naturwissenschaften und besuchte hier die Vorlesungen der Herren Professoren und Docenten: Bergmann, Braun, von Drach, Dunker, Feussner, Greeff, Hess, Melde, Stegmann, Stengel, Wagener, Wigand.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern fühle ich mich zu hohem Danke verpflichtet.

Fig. 1.

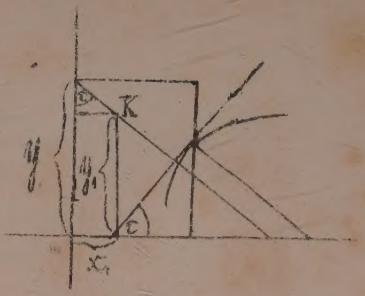

Fig. 2.

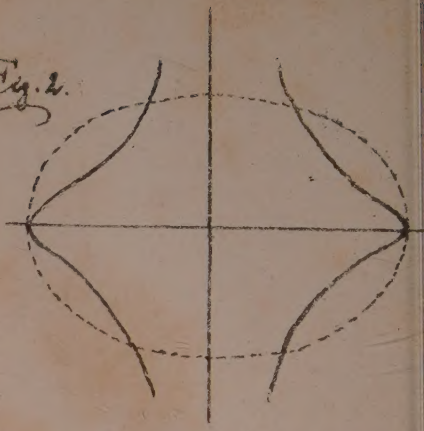

Fig. 3.

Fig. 4.

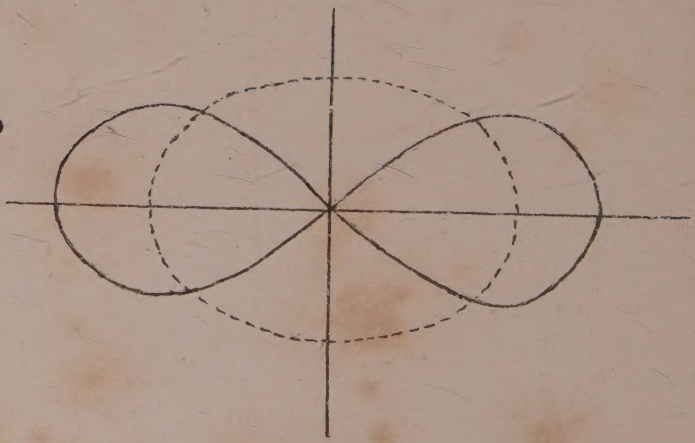

Fig. 5.

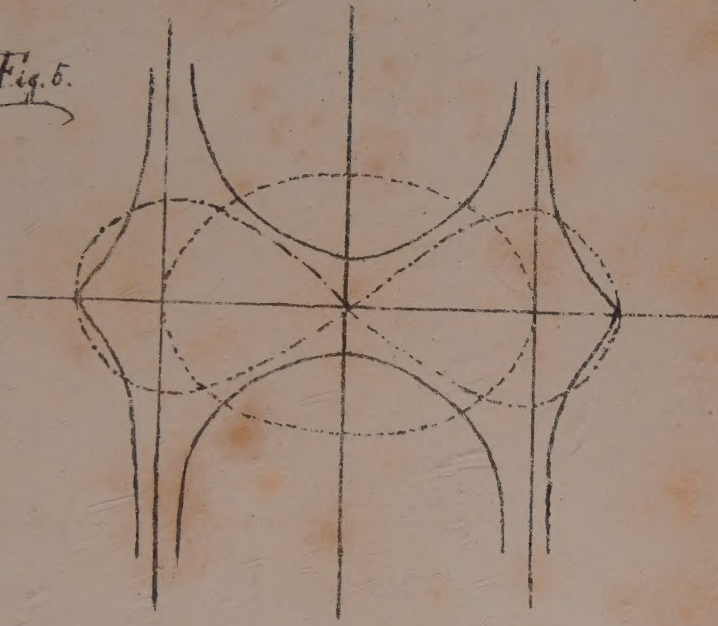
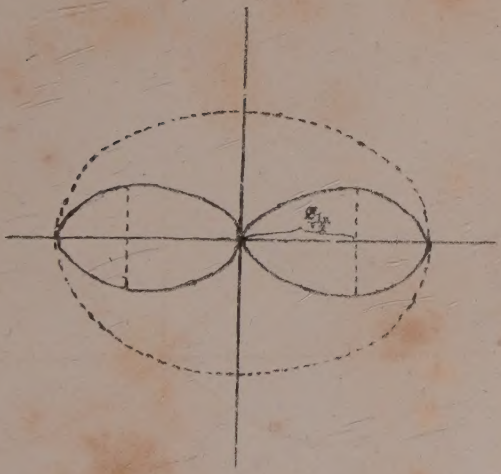
Fig. 6.